Global Journal of Pure and Applied Mathematics.
ISSN 0973-1768 Volume 8, Number 1 (2012), pp. 49–63

http://www.ripublication.com/gjpam.htm

Anneau de Valuation Non Nécessairement Commutatif et Duo-anneau de Dedekind

Mohamed ben fraj Ben Maaouia
Université Gaston Berger, Saint-Louis, Sénégal
E-mail: maaouiaalg@hotmail.com

Mamadou Sangharé
Université Cheik Anta Diop, Dakar, Sénégal
E-mail: mamsanghare@hotmail.com

Abstract

Let A be an integral duo - ring and let P be a prime ideal of A. In general, the local ring A_P is not a duo - ring. In this paper we show that if A is a duo - Dedekind - ring, then A_P is a discrete valuation ring. From that we get that A_P is a duo - Dedekind - ring.

AMS Subject Classification:
Keywords:

1. Introduction

Dans ce papier, nous étudions, les anneaux de valuation non nécessairement commutatifs qui forment une classe de duo-anneaux intègres locaux. Hormis la section suivante qui se consacre à donner un certain nombre de définitions, résultats préliminaires et des notations usuelles dans la suite, le papier est ainsi constitué: La troisième section comporte l'étude aproprement parlant des anneaux de valuations non nécessairement commutatifs formant une classe de duo-anneaux intègres locaux. Nous y avons montré qu'un anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif est principal, et que tout idéal d'un anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif est une puissance de son idéal maximal. Ce qui motive cette étude c'est, d'après [3] et [5], le fait que si A est un duo- anneau intègre, alors l'anneau A_P (dont la définition est donnée dans la section qui suit) est local mais n'est pas un duo - anneau en général. Donc A_P n'est pas en général un anneau de valuation. Et la question est de trouver une classe d'anneaux dans laquelle A_P est un anneau de valuation discrète. Une question à laquelle nous avons répondu dans ce qui constitue la dernière section du présent papier.

En effet, dans celle-là, nous introduisons les duo-anneaux de Dedekind qui sont des duo-anneaux intègres héridítaires (un anneau A est dit héritaire si tout idéal de A est projectif). Nous y montrons qu'un idéal I d'un duo-anneau de Dedekind est inversible si et seulement si I est projectif. Aussi, nous y montrons que si A est un duo-anneau de Dedekind, alors la classe des A-modules injectifs coïncide avec la classe des A-modules divisibles et en déduisons que le quotient d'un A-module injectif est injectif. D'autre part nous montrons que tout idéal fractionnaire d'un duo - anneau de Dedekind s'écrit d'une manière unique comme produit d'une puissance (positive ou négative) d'idéaux premiers, et nous en déduisons que tout idéal premier d'un duo - anneau de Dedekind est maximal. En plus, nous montrons qu'un duo - anneau intègre, A, est un anneau de valuation discrète si et seulement si A est un duo - anneau de Dedekind local, et, nous en déduisons aussi, que si A est un duo - anneau de Dedekind local, alors A est principal. Et enfin nous y montrons que si A est un duo-anneau de Dedekind, alors pour tout idéal premier P, A_P est un duo-anneau de Dedekind.

2. Définitions, résultats préliminaires et notations

Definition 2.1.

1. Soit A un anneau. On dit que A est un duo - anneau si pour tout $a \in A$ nous avons $aA = Aa$.

2. Une partie S d'un anneau A est dite multiplicative si elle est stable pour la multiplication. Et si $1 \in S$, alors la partie multiplicative S de A est dite saturée si, pour tout $s, t \in A$:
$$st \in S \Longrightarrow s \in S \text{ et } t \in S.$$

3. Un idéal bilatère P d'un anneau A est dit premier si $P \neq A$, et si, pour tout $a, b \in A$, la relation:
$$aAb \subseteq P \Longrightarrow a \in P \text{ ou } b \in P.$$

Lemma 2.2. L'ensemble des élélments réguliers d'un duo - anneau est une partie multiplicative saturée.

Lemma 2.3. Toute partie multiplicative saturée de non diviseurs de zéro (0) d'un duo - anneau vérifie les conditions de Ore.

Lemma 2.4. Soit A un duo - anneau, et soit P un idéal premier de A. Alors:

1. $\forall\ a, b \in A, ab \in P \Longrightarrow a \in P$ ou $b \in P$.

2. $A \setminus P$, qui est le complémentaire de P dans A, est une partie multiplicative saturée.

Theorem 2.5. Soit A un duo - anneau intègre et S une partie multiplicative saturée de A. Alors la relation $\mathcal{R}$ définie sur $S \times A$ par:

$$(s, a)\mathcal{R}(s', a') \Longleftrightarrow \exists\, x, y \in S \; : \; xa \; = \; ya' \text{ et } xs \; = \; ys',$$

est une relation d'équivalence.

Notations

1. L'ensemble des classes déquivalence modulo $\mathcal{R}$, définie ci-haut, sera noté $S^{-1}(A)$.
2. Si $(s, a) \in S \times A$, alors la classe de (s, a) modulo $\mathcal{R}$ est notée $\frac{a}{s}$.
3. Si $S = A \setminus P$, (où P est un idéal premier de A) alors $S^{-1}(A)$ est noté A_P.

Theorem 2.6. Soit A un duo - anneau intègre et S une partie multiplicative saturée de A. Alors la correspondance:

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}(A) \times S^{-1}(A) & \longrightarrow & S^{-1}(A) \\ (\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'}) & \longmapsto & \frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{xa + ya'}{ys'} \end{array}$$

où $x, y \in S$ sont tels que $xs = ys'$, est une loi de composition interne sur $S^{-1}(A)$. Et, de plus, $(S^{-1}(A), +)$ est un groupe abélien. Dans le cas particulier où $S = A \setminus P$, avec P un idéal premier de A, nous avons $(A_P, +)$ est un groupe abélien.

Theorem 2.7. Soit A un duo - anneau intègre et S une partie multiplicative saturée de A. Alors la correspondance:

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}(A) \times S^{-1}(A) & \longrightarrow & S^{-1}(A) \\ (\frac{a}{s}, \frac{b}{t}) & \longmapsto & \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{zb}{ws} \end{array}$$

où $(w, z) \in S \times A$, et, est tel que $wa = zt$, est une loi de composition interne sur $S^{-1}(A)$ appelée multiplication, et, de plus, $(S^{-1}(A), +, \cdot)$ est un anneau. Dans les cas particuliers, où:

1. $S = A \setminus P$, avec P un idéal premier de A, alors $(A_P, +, \cdot)$ est un anneau. Cet anneau est appelé le localisé de A en P.
2. $S = A \setminus \{0\}$, $(S^{-1}(A), +, \cdot)$ est un anneau. Cet anneau est appelé l'anneau de division de A.

Theorem 2.8. Soit A un duo - anneau intègre et P un idéal premier de A. Alors le localisé A_P de A en P est un anneau local d'idéal maximal $P_P = PA_P$.

3. Anneau de valuation non nécessairement commutatif

Le but de cette section est de donner une méthode de construction de duo - anneau non nécessairement commutatif, et de les é'tudier.

Definition 3.1. Soit $(G, \leq)$ un groupe ordonné. Alors $(G, \leq)$ est dit direct si pour tout $a, b \in G$ on a $Max\{a, b\}$ et $min\{a, b\}$ existent.

Remark 3.2. Dans la suite de cette section e désigne l'élément neutre de G.

Definition 3.3. Soient K un anneau de division (corps non commutatif) et $(G, \leq)$ un groupe ordonné direct.

On pose $\bar{G} = G \cup \{\infty\}$ où $\infty \notin G$ vérifiant $g \,.\, \infty = \infty \,.\, g = \infty$, pour tout $g \in G$. Alors on appelle valuation sur K une application $v : K \longrightarrow \bar{G}$ vérifiant:

1. $v(0) = +\infty$
2. $v(xy) = v(x)\ v(y),\ \forall x, y \in K^*$
3. $v(x + y) \geq min(v(x),\ v(y),\ si\ x, y \in K^*\ et\ y \neq -x.$

Remark 3.4. Si $v : K \longrightarrow \overline{G}$ est une valuation sur K, alors G est dit groupe de valuation v.

Definition 3.5. Une valuation $v : K \longrightarrow \overline{G}$ est dite discrète si $G = \mathbb{Z}$.

Theorem 3.6. (et Définition) Soit $v : K \longrightarrow \bar{G}$ une valuation d'un anneau de division K. Alors l'ensemble $A_v = \{x \in K^*\ /\ v(x) \geq e\ ou\ x = 0\}$ est un anneau, dit anneau de valuation associé à v.

4. Notation

Dans la suite tout anneau de valuation est noté par A_v.

Proposition 4.1. ([6]) et([7]) Tout anneau de valuation est un duo-anneau.

Preuve. Soit $v : K \longrightarrow \bar{G}$ une valuation et $A_v = \{x \in K^*\ /\ v(x) \geq e\ ou\ x = 0\}$ l'anneau associé à v.

Montrons que A_v est un duo-anneau. Posons $A = \{x \in K\ /\ v(x) \geq v(a)\}$, pour tout $a \in A_v$. Montrons que $aA_v = A = A_v a$.

Soit $x \in A \Longrightarrow v(x) \geq v(a) \Longrightarrow v(xa^{-1}) \geq v(1) = e$ donc $xa^{-1} \in A_v$ supposons que $xa^{-1} = y$ alors $x = ya \in A_v a$ ce qui implique que $A \subset A_v a$. Soit maintenant $xa \in A_v a$ donc $v(xa) = v(x)\ v(a) \geq v(a)$ (car $x \in A_v$) donc $xa \in A$, ce qui implique $A_v a \subset A$. Ainsi $A = A_v a$. De même on montre que $A = aA_v$. Soit $x \in A$ donc $v(x) \geq v(a) \Longrightarrow v(a^{-1}x) \geq e \Longrightarrow a^{-1}x \in A_v$ supposons que $a^{-1}x = y \in A_v$

alors $x = ay \in aA_v$ ce qui implique que $A \subset aA_v$. Soit maintenant $ax \in aA_v$ donc $v(ax) = v(a)\ v(x) \geq v(a)$ (car $x \in A_v$) d'où $ax \in A$, ainsi $A_v \subset A$. ∎

Conclusion: Pour tout $a \in A_v$ on a $aA_v = A = A_v a$ d'où le résultat.

Proposition 4.2. ([6]) et ([7]) Soient $v : K \longrightarrow \overline{G}$ une valuation et A_v l'anneau de valuation associé à v. Soit I un idéal principal de A_v alors il existe $a \in A_v$ tel que

$$I = \{x \in K^*/v(x) \geq v(a) \text{ ou } x = 0\}.$$

Preuve. D'après la preuve de la proposition précédente I est principal donc il existe $a \in A_v$ tel que

$$I = aA_v = \{x \in K^*/v(x) \geq v(a) \text{ où } x = 0\}$$

∎

Proposition 4.3. ([6]) et ([7]) Soit A_v un anneau de valuation associé à une valuation v. Alors A_v est local d'idéal maximal $P = \{x \in A_v\ ,\ v(x) > e \ \textit{ou}\ x = 0\}$.

Preuve. Il suffit de montrer que P est un idéal et que si I est un idéal propre de A_v alors $I \subset P$. Soient $x, y \in P$ alors $v(x) > e$ et $v(y) > e$ donc $v(x)\ v(y) > e \Longrightarrow v(xy) > e \Longrightarrow xy \in P$. Maintenant si $a \in A_v$ et $x \in P$ on a $v(a) \geq e$ et $v(x) > e \Longrightarrow v(ax) > e$ ce qui implique $ax \in P$. Ainsi P est un idéal de A. Reste à montrer que si I est un idéal propre de A_v alors $I \subset P$ soit $x \in I$ montrons que $v(x) \neq e$. Supposons que $v(x) = e$ donc $v(xx^{-1}) = v(x)\ v(x^{-1}) = e$ ce qui implique $v(x^{-1}) = e \Longrightarrow x^{-1} \in A_v$ donc x est inversible dans A_v ce qui est absurde car I est un idéal propre de A_v. ∎

Conclusion: P est l'unique idéal maximal de A_v donc A_v est local.

Proposition 4.4. ([6]) et ([7]) Soit $v : K \longrightarrow \overline{G}$ une valuation (non nécessairement commutative) avec G totalement ordonné. Alors tout idéal de type fini est principal.

Preuve. Soit I un idéal de type fini engendré par le système $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. G est totalement ordonné ; supposons que $v(a_1) \leq v(a_n)$ et montrons alors que $I = a_1\ A_v$ on a pour tout $2 \leq i \leq n$: $v(a_i) \geq v(a_1)$ donc pour tout $2 \leq i \leq n$ on a $a_i \in a_1 A_v$. d'où $I \subset a_1 A_v$ ainsi $I = a_1 A_v$. ∎

Theorem 4.5. Tout anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif est principal.

Preuve. Soit I un idéal propre de A_v.

Soit $x \in I$, alors $v(x) > 0$ car A_v est local donc $I \subset P$ où P est l'idéal maximal de A_v. Alors il existe $a \in I$ tel que, pour tout $x \in I$, $v(x) \geq v(a)$ car $v(I)$ est une partie de $\mathbb{N}^*$. Montrons alors que I est engendré par a.

Soit $x \in I$ alors $v(x) \geq v(a)$ d'après ce qui précéde donc, $x \in A_v a$ $I = A_v a$ d'où I est principal. Ainsi A_v est principal. ∎

Theorem 4.6. Soit A_v un anneau de valuation associé à une valution discrète non nécesssairement commutative v, alors tout idéal de A_v est une puissance de P où P est l'unique idéal maximal de A_v.

Preuve. On a A_v est un anneau de valuation associé à une valuation discrète (non nécessairement commutative).

Soit K un anneau de division tel que $v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ donc

$$\begin{array}{lll} \bar{v} : K^* & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & v(x) \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes ($K^* = K \backslash \{0\}$). $v(xy) = v(x) + v(y)$. Ainsi $Im\bar{v}$ est un sous - groupe de $\mathbb{Z}$. Supposons que $Im\bar{v} \neq \{0\}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $Im\bar{v} = k\mathbb{Z}$. Montrons que l'idéal maximal P de A_v est engendré par $a \in A_v$ vérifiant $v(a) = k$. On a

$$P = \{x \in A_v / v(x) > 0\} \cup \{0\},$$

et k est le plus petit entier strictement positif de Imv donc

$$P = \{x \in A_v / v(x) \geq k\} \cup \{0\}$$

D'où $P = \{x \in A_v / v(x) \geq v(a)\}$. Donc d'après ce qui précéde P est engendré par a.

Soit I un idéal propre de A_v alors I est principal. Supposons que I est engendré par b. Comme $I \subset P$ alors $v(b) \geq v(a)$ et $v(b) \in Im\bar{v}$ donc $v(b) \in k\mathbb{Z}$. Supposons que $v(b) = k_o$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k_o = kn$ ce qui implique que $v(b) = nv(a)$ implique que $v(b) = v(a^n) = k_o$ donc I est engendré par a^n. Ainsi $I = P^n$. d'où le résultat. ∎

5. Duo - anneau de Dedekind

Sauf mention du contraire, dans toute cette section S désignera l'ensemble des éléments réguliers de l'anneau A.

Definition 5.1. Soient A un duo - anneau intégre et $S^{-1}(A)$ son anneau total de fractions. Et soit I un sous - A-module à droite de $S^{-1}(A)$. Alors I est dit fractionnaire à droite s'il existe $d \in S^{-1}(A)$ et $d \neq 0$ tel que $Id \subset A$.

Definition 5.2. Soit I une partie non vide de $S^{-1}(A)$. Alors I est dite un idéal fractionnaire à gauche de A si I est un A sous - module à gauche de $S^{-1}(A)$ et il existe $d \in S^{-1}(A)$ avec $d \neq 0$ tels $dI \subset A$.

Definition 5.3. Soit I une partie non vide de $S^{-1}(A)$. Alors I est dite idéal fractionnaire de A si I est un idéal fractionnaire à gauche et à droite.

Exemples:

1. Soit I un idéal de A (A est un duo - anneau intègre) non réduit à $\{0\}$. Alors I est fractionnaire.

2. Si A est un duo - anneau intègre, alors tout sous - module à gauche de $S^{-1}(A)$ (respectivement à droite de $S^{-1}(A)$) engendré par un seul élément non nul est fractionnaire à gauche (respectivement à droite). C'est-à-dire que si $x \in S^{-1}(A)$ avec $x \neq 0$, alors xA est fractionnaire à gauche et Ax est fractionnaire à droite.

Proposition 5.4. (et Définition) Soient I et J deux idéaux fractionnaires d'un duo - anneau intègre A. Alors l'ensemble noté par

$$(I : J) = \{x \in S^{-1}(A) : Jx \subset I\}$$

est un sous - module à droite de $S^{-1}(A)$ ($S^{-1}(A)$ est un $A - A$ - bimodule). $(I : J)$ est appelé transporteur à droite de J par I.

Preuve. $(I : J) \neq \phi$ car $0 \in (I : J)$
$x, y \in (I : J)$
donc $Jx \subset I$ et $Jy \subset I$
d'où $Jx + Jy \subset I \Longrightarrow J(x + y) \subset I$.
$\Longrightarrow x + y \in (I : J)$

$$\text{si } x \in (I : J) \Longrightarrow Jx \subset I$$
$$\Longrightarrow (Jx)a \subset Ia \subset I$$
$$\Longrightarrow J(xa) \subset I$$
$$\Longrightarrow xa \in (I : J)$$

Donc $(I : J)$ est un sous - module à droite de $S^{-1}(A)$. ■

Remark 5.5. De la même manière on définit le transporteur à gauche de J par I.

Corollary 5.6. Soient I un idéal fractionnaire à gauche et J un idéal fractionnaire à droite. Alors $(A : I)$ est un sous - module à gauche non nul et $(A : J)$ est un sous - module à droite non nul.

Remark 5.7. On note par:

$$(A : I)_d = \{x \in S^{-1}(A)/Ix \subset A\}$$

c'est le transporteur à droite de I par A

$$(A : I)_g = \{x \in S^{-1}(A)/xI \subset A\}$$

c'est le transporteur à gauche de I par A.

Definition 5.8. Soit I un idéal fractionnaire de A. Alors I est dit inversible à droite s'ils existent $x_k \in I$ et $y_k \in (A : I)_d$ en nombre fini tels que $1 = \sum x_k y_k$.

Definition 5.9. Soit I un idéal fractionnaire à gauche de A. Alors I est dit inversible à gauche s'ils existent $x_k \in I$ et $y_k \in (A : I)_g$ en nombre fini tels que $1 = \sum y_k x_k$.

Definition 5.10. Un idéal fractionnaire est dit inversible s'il est inversible à gauche et à droite.

Proposition 5.11. Soient A un duo - anneau intègre et I un idéal fractionnaire inversible à droite (resp. à gauche). Alors $I \times (A : I)_d = A (resp. (A : I)_g \times I = A)$.

Preuve. Supposons que I est inversible à droite alors ils existent $x_k \in I$ et $y_k \in (A : I)_d$ en nombre fini tels que $1 = \sum x_k y_k$ donc pour tout $a \in A$ on a

$$a = \sum a(x_k y_k) = \sum (a x_k) y_k \in I \times (A : I)_d$$

donc $A \subset I \times (A : I)_d$ et c'est clair d'après la définition de $(A : I)_d$ que $I \times (A : I) \subset A$, en effet soit $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ un élément de $I \times (A : I)_d$, alors pour tout $1 \leq i \leq n x_i y_i \in A$ donc $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in A$. Ainsi $I \times (A : I)_d = A$. Et de la même manière on montre que $(A : I)_g \times I = A$. ∎

Definition 5.12. Si I est un idéal fractionnaire inversible à droite (resp. à gauche), alors $(A : I)_d$ est dit inverse à droite de I (resp. $(A : I)_g$ est dit inverse à gauche de I).

Proposition 5.13. (et Définition) Soit A un duo - anneau intègre et I un idéal inversible. Alors l'inverse à gauche de I coïncide avec son inverse à droite et il est dit l'inverse de I et est noté par $(A : I) = I^{-1}$.

Preuve. On a $I \times (A : I)_d = A$ et $(A : I)_g \times I = A$ donc
$I \times (A : I)_d = (A : I)_g \times I$
$\Longrightarrow (A : I)_g \times (A : I)_d = (A : I)_g \times A$
$\Longrightarrow A(A : I)_d = (A : I)_g \times A$
$\Longrightarrow (A : I)_d = (A : I)_g$. ∎

Notations

1. Si I est un idéal inversible à droite alors son inverse à droite $(A : I)_d$ est noté par I_d^{-1}
2. Si I est un idéal inversible à gauche alors son inverse à gauche $(A : I)_g$ est noté par I_g^{-1}.
3. Si I est un idéal fractionnaire inversible alors son inverse $(A : I)$ est noté par I^{-1}.

Proposition 5.14. Soient A un duo - anneau intègre et $S^{-1}(A)$ son anneau de division. Alors l'ensemble des idéaux fractionnaires de A inversibles muni de la multiplication des idéaux est un groupe commutatif d'élément neutre A.

Preuve. Soient I et J deux idéaux fractionnaires inversibles alors $(IJ) \times (J^{-1} \times I^{-1}) = A$ donc IJ est inversible et son inverse est $J^{-1}I^{-1}$. D'où le résultat. ■

Definition 5.15. Soit I un idéal d'un duo - anneau intègre. Alors I est dit inversible s'il est inversible à gauche et à droite.

Proposition 5.16. Soient A un duo - anneau intègre et I un idéal inversible à droite (resp. à gauche); alors I est de type fini.

Preuve. Supposons que I est inversible à droite alors il existe $x_k \in I$ et $y_k \in S^{-1}(A)$ en nombre fini tels que $1 = \sum x_k y_k$. Soit $a \in I$ alors $a = \sum (ax_k) y_k$ et comme A est un duo - anneau $\exists x'_k \in A$ tels que $ax_k = x'_k a$ donc $a = \sum (x'_k a) y_k = \sum x'_k (a y_k)$ or $ay_k \in A$ donc $a \in \sum x'_k A$ ce qui prouve que I est de type fini.

De même si I est inversible à gauche alors $1 = \sum y_k\, x_k$ donc pour tout $a \in A$

$$a = \sum (y_k x_k) a = \sum y_k (x_k a)$$

alors ils existent $x''_k \in$ tels que $x_k a = a x''_k$ d'où

$$a = \sum (y_k a) x''_k \text{or} y_k a \in A$$

donc

$$I = \sum A x''_k = \sum x''_k A$$

donc I est de type fini. ■

Lemma 5.17. Soit M un A-module à gauche. Alors M est projectif $\Leftrightarrow$ il existe une famille $\{m_k, k \in K\}$ d'éléments de M et une famille $\{\phi_k : M \longrightarrow A\}$ de morphismes de A-modules à gauche telles que:

1. Si $m \in M$, $\phi_k(m) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indice k.
2. Si $m \in M$, $m = \sum_{k \in K} \phi_k(m) m_k$.

Definition 5.18. Soient A un anneau, M un A-module à gauche et $(a, m) \in A \times M$. Alors m est dit divisible par a s'il existe $m' \in M$ tel que $m = am'$.

Definition 5.19. Soit M un A-module à gauche. Alors M est dit divisible si tout élément de M est divisible par les non diviseurs de zéro (0) de A.

Lemma 5.20. Tout module injectif est divisible.

Lemma 5.21. Le quotient d'un module divisible est divisible.

Definition 5.22. Soit A un anneau. Alors:

1. A est dit héréditaire à gauche si tout idéal à gauche est projectif.
2. A est dit héréditaire à droite si tout idéal à droite est projectif.
3. A est dit héréditaire s'il est héréditaire à gauche et à droite.
4. A est dit semi-héréditaire à gauche (resp. à droite) si tout idéal à gauche (resp. à droite) de type fini est projectif.
5. A est dit semi-héréditaire s'il est semi-héréditaire à gauche et à droite.

Lemma 5.23. Soit A un anneau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

1. A est héréditaire.
2. Tout sous-module d'un A-module projectif est projectif.
3. Tout quotient d'un A-module injectif est injectif.

Theorem 5.24. Soient A un duo-anneau intègre et I un idéal de A. Alors I est projectif $\Leftrightarrow$ I est inversible.

Preuve. Supposons que I est projectif alors ils existent une famille $\{a_k, k \in K\}$ d'éléments de I est une famille de morphismes $\{\phi_k : I \longrightarrow A\}$ vérifiant les deux conditions du lemme précédent soit $b \in I$, avec $b \neq 0$, posons $y_k = \phi_k(b)b^{-1}$. Montrons que y_k ne dépend pas du choix de b.

Soit $b' \neq 0$ et $b' \in I$, alors $b'\phi_k(b) = \phi_k(b'b)$. Soit $x \in A$ tel que $b'b = xb'$ alors $b'\phi_k(b) = x\phi_k(b')$
donc on a : $\begin{cases} b'\phi_k(b) & = x\phi_k(b') \\ b'b & = xb' \end{cases}$,
d'où $\phi_k(b)b^{-1} = \phi_k(b')b'^{-1}$. Ainsi y_k ne dépend pas du choix de b.

Montrons que $y_k I \subset A$ soit $b \in I$ alors $y_k = \phi_k(b)/b = 0y_k b = \phi_k(b) \in A$. Et d'autre part $by_k = y_k b = 0$ sauf pour un nombre fini d'indice k.

Soit$b \in I$, alors $$\begin{aligned} b &= \sum(\phi_k(b))a_k = \sum(q_k(b)a_k \\ &= \sum(bq_k)a_k \\ b &= b(\sum(\phi_k(a_k) \end{aligned}$$

d'où il existe un nombre fini d'indice k tel que $\sum a_k q_k = 1$. Donc I est inversible.

Supposons que I est inversible à gauche, alors il existe $a_1, \dots, a_n \in I$ et $q_1, \dots, q_n \in S^{-1}(A)$ tels que $q_k I \subset A$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k q_k = 1$.

$$\text{Soit}\phi_k : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & \phi_k(a) = q_k a \end{array}$$

alors $Im\phi_k \subset A$, soit $a \in I$, alors $a = \sum a_k \phi_k(a) = \sum a_k(q_k a) = \sum (a_k q_k) a$ d'où I est A-module projectif à gauche.
De même si I est inversible à droite, alors ils existent $a_1, \dots, a_n \in I$ et $q_1, \dots, q_n \in S^{-1}(A)$ tels que $iq_k \subset A$ et $\sum q_k a_k = 1$. Soit:

$$\phi_k : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & \phi_k(a) = aq_k \end{array},$$

alors $Im\phi_k \subset A$ et $Im\phi_k = Iq_k$. Soit $a \in I$
alors $a = \sum \phi_k(a) a_k = \sum (aq_k) a_k = a \sum q_k a_k$ d'où I est idéal projectif à droite.
Ainsi le résultat I est projectif $\Leftrightarrow$ I est inversible. ■

Corollary 5.25. Soit A un duo-anneau intègre. Alors A est héridітaire $\Leftrightarrow$ tout idéal non nul de A est inversible.

Definition 5.26. On appelle duo - anneau de Dedekind un duo-anneau intègre héridітaire.

Exemples

1. $\mathbb{Z}$ est un duo - anneau de Dedekind (c'est l'exemple trivial).

2. Tout anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif est un duo - anneau de Dedekind non nécessairement commutatif car tout anneau intègre principal est un duo - anneau de Dedekind.

Remark 5.27.

1. On peut donner comme définition d'un duo - anneau de Dedekind, un duo-anneau intègre dont tout ses idéaux non nuls sont inversibles.

2. Cette définition des duo - anneaux de Dedekind est une généralisation de la définition bien connue dans le cas commutatif; qui est, qu' “un anneau de Dedekind est un anneau commutatif intègre dont tout ses idéaux non nuls sont inversibles”.

3. Tout duo - anneau de Dedekind est Noethérien.

Theorem 5.28. Soit A un duo-anneau. Alors A est un duo - anneau de Dedekind $\Leftrightarrow$ tout module divisible est injectif.

Preuve. Supposons que A est un duo - anneau de Dedekind. Soient D un A-module à gauche divisible, I un idál de A et $f : I \longrightarrow D$ I un morphisme de A-module à droite.

Montrons que f est prolongeable sur A. Comme A est un duo- - anneau de Dedekind alors I est inversible. D'où, ils existent $a_1, \ldots, a_n \in I$ et $q_1, \ldots, q_n \in S^{-1}(A)$ tels que que $Iq_k \subset A$ et $\sum a_k q_k = 1$. Comme D est divisible, pour tout $1 \leq k \leq n$ il existe $d_k \in D$ tel que $d_k a_k = f(a_k)$. Soit $a \in I$ on a $f(a) = f\big(\sum (a_k q_k)a\big)$

$$= f\big(\sum a_k(q_k)a\big) \quad \begin{aligned} &= \sum f(a_k)(q_k)a \\ &= \big(\sum d_k a_k q_k\big)a \end{aligned}.$$

Posons $d = \sum_{k=1}^{n} d_k(a_k q_k)$ donc on $f(a) = da$.

On définit alors$g$: $\begin{array}{l} A \longrightarrow D \\ a \longmapsto g(a) = da \end{array}$.

Ainsi D est injectif.

Réciproquement, supposons que tout A-module à droite divisible est injectif. Montrons que A est un duo - anneau de Dedekind. Soit D un A-module divisible à droite alors le quotient de D est divisible (d'après les lemmes précédents). Donc le quotient de D est injectif. Ce qui prouve que D est hériditaire. D'où D est un duo - eanneau de Dedekind. (d'après les lemmes précédents.) ■

Corollary 5.29. Soient A un duo-anneau intègre principal et M un A-module à gauche. Alors M est injectif $\Leftrightarrow$ M est divisible.

Preuve. Il suffit de montrer (remarquer) que tout idéal d'un duo - anneau intègre principal est inversible (c'est-à-dire qu'un duo - anneau intègre principal est un duo - anneau de Dedekind). Par suite, un A-module est injectif $\Leftrightarrow$ il est divisible. ■

Lemma 5.30. Soit A un duo - anneau de Dedekind. Alors tout idéal I de A s'écrit de façon unique comme produit de puissances positives d'idéaux maximaux.

Preuve. Comme I est un idéal de A, qui est un duo - anneau de Dedekind, alors I est inversible. Soit P_1 un idéal maximal tel que

$$I \subset P_1, \text{si} I P_1^{-1} = A \text{alors} I = P,$$

sinon $IP_1^{-1} \subset A$ donc soit P_2 un idéal maximal contenant IP_1^{-1}. Alors si $IP_1^{-1} \times P_2^{-1} = A$, nous avons $I = P_1 P_2$. Sinon on construit P_3 l'idéal maximal de A contenant $IP_1^{-1}P_2^{-1}$ on construit ainsi une suite croissante d'idéaux $I \times P_1^{-1} \times P_2^{-1} \times \cdots \times P^{-1}$ qui doit stationner (car A est noethérien).

Il existe donc $k_o > 0$ tel que

$$I \times P_1^{-1} \times P_2^{-1} \times \cdots \times P_{k_o}^{-1} = A \text{d'où} I = P_1 \times P_2 \times \cdots P_{k_o}.$$

L'unicité de cette décomposition résulte du fait que les P_i sont des idéaux maximaux de A, pour tout $1 \leq i \leq k_o$. ■

Corollary 5.31. Soit A un duo - anneau de Dedekind. Alors tout idéal premier est maximal.

Preuve. Soit P un idéal premier de A, alors d'après le lemme précédent P s'écrit comme produit d'idéaux maximaux. Ainsi P contient au moins un idéal maximal m d'où le résultat $P = m$ ainsi P est maximal. ■

Theorem 5.32. Soit A un duo - anneau de Dedekind. Alors tout idéal fractionnaire à gauche (resp. à droite) s'écrit de façon unique (à l'ordre près des facteurs) comme produit de puissances (positives ou négatives) d'idéaux premiers.

Preuve. Soit I un idéal fractionnaire à gauche de A, alors il existe $d \in S^{-1}(A)$ avec $d \neq 0$ tel que l'ensemble $J = dI$ soit un idéal de A, supposons que $d = \frac{x}{y}(x \in$ Aet$0 \neq g \in A)$ donc l'ensemble $I' = \frac{1}{y}I$ est fractionnaire à gauche on a alors $J = xI'$ qui est un idéal de A, ainsi $J = (Ax)I'$ donc $I' = (Ax)^{-1}J$ ce qui implique que $I = y(Ax)^{-1}J = (Ay)(Ax)^{-1}J$, d'où I s'écrit comme produit d'idéaux de A.

Donc d'après ce qui précéde (lemme précédent) I s'écrit comme produit de puissances d'idéaux premiers

$$I = P_1^{n_1} \times P_2^{n_1} \times ... \times P_k^{n_k} \text{où} n_i \in \mathbb{Z}, \forall 1 \leq i \leq k.$$

La décomposition de I est unique à l'ordre près des facteurs est du fait que pour tout $1 \leq i \leq k$. P_i est un idéal maximal. ■

Theorem 5.33. Soient A un duo - anneau de Dedekind. Alors pour tout idéal premier P on peut construire une valuation discrète, notée v_P, de la manière suivante:

1. $\forall x \in S^{-1}(A)$ non nul, on pose $v_P(x)$ est l'exposant de P (qui peut être nul) dans la décomposition de l'idéal fractionnaire Ax de A en produit de facteurs premiers.

2. $v_P(0) = +\infty$.

Preuve. Soit P un idéal premier de A. Montrons que $v_P : S^{-1}(A) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ définie ci-dessus est une valuation discrète c'est clair que v_P est une application. Soient $x, y \in S^{-1}(A)$ non nuls $v_P(xy) =$ l'exposant de P dans la décomposition de l'idéal fractionnaire $A(xy)$, donc il suffit de remarquer que $A(xy) = (Ax)(Ay)$ donc l'exposant $v_P(xy) = v_P(x) + v_P(y)$. Et on vérifie comme le cas commutatif que $v_P(x + y) \geq min(v_P(x), v_P(y))$. D'où v_P est une valuation discrète non nécessairement commutative. ■

Theorem 5.34. Soient A un duo - anneau de Dedekind. On peut construire une valuation discrète non nécessairement commutative. De la manière suivante:
Soit P un idéal premier de A on pose: si $x \in A$ et $x \neq 0$, $v_P(x) =$ l'exposant de P

dans la décomposition de l'idéal fractionnaire Ax de A en produit de facteurs premiers, si $x \notin A$ alors $v_P(x) = v_P(a) - v_P(b)$où $\frac{a}{b} = x$et$v_P(0) = +\infty$.

Preuve. On le vérifie comme dans le cas commutatif. ■

Theorem 5.35. Soit A un duo - anneau intègre. Alors A est un anneau de valution discrète (non nécessairement commutatif) $\Leftrightarrow$ A est un duo - anneau de Dedekind local.

Preuve. Si A est un anneau de valutation discrète non nécessairement commutatif alors d'après ce qui précéde il est un duo - anneau de Dedekind local. Supposons que A est un duo - anneau de Dedekind local. Alors il contient un seul idéal premier P qui est maximal. Considérons la valuation v_P construite dans le théorème 5.33, et montrons que $A = A_{v_P}$

$$A_{v_P} = \left\{x \in S^{-1}(A)/v_p(x) \geq 0\right\}$$

on a $\forall x \in A$, $v_P(x) \geq 0$ donc $A \subset A_{v_P}$. Et si $x \in P$, $v_P(x) > 0$. Donc l'idéal maximal P de A est égal à l'idéal maximal de A_{v_P}. Ainsi $A = A_{v_P}$. d'où A est un anneau valuation discrète (non nécessairement commutatif).

Corollary 5.36. Soit A un duo-anneau de Dedekind local d'idéal maximal P. Alors A est principal et tout idéal de A est une puissance positive de P.

Preuve. Clair, d'après ce qui précède. ■

Theorem 5.37. Soient A un duo-anneau de Dedekind et P un idéal premier. Alors A_P est un anneau de valuation discrete (non nécessairement commutatif).

Preuve. Posons $D =$ l'anneau total de fractions de A et $S = A \backslash P$. Donc on a A_P est local d'idéal maximal $P_P = PA_P$, alors si I est un idéal de A_P donc $(i_A^S)^{-1}(I)$ est un idéal de A contenu dans P. Ainsi on peut construire une valuation discrète

$$v : D \longrightarrow Z \cup \{+\infty\}$$

de la manière suivante:

1. Si $\frac{a}{s} \in A_P$ et $\frac{a}{s} \neq 0$, $v\big(\frac{a}{s}\big) = n$, où n est l'exposant de l'idéal P dans la décomposition de l'idéal $(i_A^S)^{-1}\big(\frac{a}{s}A_P\big)$ comme produit de puissances d'idéaux premiers.

2. si $\frac{a}{s} \notin A_P v(\frac{a}{s}) = v(a) - v(s)$

3. $v(0) = +\infty$.

Montrons que v est bien définie.
Soient $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \notin A_P$ si $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Longrightarrow \exists x, y \in A$ non nuls tels que:

$$\begin{cases} xa = yb \\ xs = yt \end{cases},$$

donc on a:

$$v(xa) = v(x) + v(a), v(xs) = v(x) + v(s)$$
$$v(yb) = v(y) + v(b) et v(yt) = v(y) + v(t)$$
$$or \begin{cases} v(xa) = v(yb) \\ v(xs) = v(yt) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v(x) + v(a) = v(y) + v(b) \\ v(x) + v(s) = v(y) + v(t) \end{cases}$$

$\Longrightarrow v(a) - v(s) = v(b) - v(t)$ donc v est bien définie et comme dans le cas commutatif, v est une valuation discrète et son anneau de valuation est égal à A_P d'où le résultat. ■

Corollary 5.38. Soient A un duo-anneau de Dedekind et P un idéal premier. Alors A_P est un duo-anneau de Dedekind.

Preuve. Clair d'après le théorème précédent. Car si A est un duo-anneau de Dedekind, alors A_P est un anneau de valuation discrète. Donc, on en déduit que A_P est un duo - anneau de Dedekind. ■

References

[1] Atiyah M. F., Frs I. G. Macdonald (University of OXFORD: Introduction to commutative algebra, Addison - Wesley Publishing Company, 1969.

[2] AUGUST ERNEST BEHRENS: Rings theory, Academic Press New York and London, 1972.

[3] Ben Maaouia Mohamed Ben Fraj et Mamadou Sanghare: Localisation dans les duo - anneaux Afrika Mathematika, 2009.

[4] Ben Maaouia Mohamed Ben Fraj, Doctorat 3ième Cycle, Faculté des Sciences et Techniques, UCAD, Dakar, Juillet, 2003.

[5] Brigns H. H., Three questions on duo - Rings, Pacific Journal of Mathematics Vol. 58, No. 2, 1975.

[6] Pirtle Elebertm: (Kannas ciry, Missouri) localisation in duo-Ring.

[7] Pirtle Elebertm: Non commutative valuation Ring, AMS Subject Classification, 1984: Primary 16A09.

[8] Renault G., Algèbre non commutative, Gauthier-Villars, Paris - Bruxelles - Montréal 1975.

[9] Rotman Joseph J., Notes on homological algebra, University of Illinois, Uraba, 1968.

[10] Thierrin G., On Duo - Rings. Canadian Math. Bulletin, vol. 3, p. 167–172, 1960.